Adı-Soyadı: **Numarası:**

MAT 101 ANALİZ I FİNAL SINAVI SORULARI

1) Bir kümenin supremumu ve infimumu tanımlarını veriniz. $A=\{x\in\mathbb{R}:\log_4 x+6\log_x 4-5=0\}$ ve $B=\{x\in\mathbb{R}:\operatorname{ch}x=-1\}$ olmak üzere $A\cup B$ kümesinin varsa supremum ve infimum değerlerini bulunuz. (10 puan)

2) $x\in(-1,1)$ olmak üzere $\sec(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ eşitliğini ispatlayınız. (10 puan)

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0$ olduğunu ispatlayınız. (10 puan)

4) Stolz teoremini ifade ediniz ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2.1!+3.2!+\ldots+(n+1).n!}{(n+2)!}=0$ olduğunu gösteriniz. (10 puan)

5) $a_1=2$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $a_{n+1}=\dfrac{a_n+5}{3}$ ile tanımlı (a_n) dizisi veriliyor.

a) (a_n) dizisinin $\dfrac{5}{2}$ ile üstten sınırlı olduğunu gösteriniz. (5 puan)

b) (a_n) dizisinin artan olduğunu gösteriniz. (5 puan)

c) (a_n) dizisi yakınsak mıdır? Açıklayınız. Yakınsak ise limitini bulunuz. (5 puan)

6) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız. (L'Hospital kuralını kullanmayınız.) (15 puan)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\frac{x}{2}\sin x}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{3x}+e^{2x}+e^{x}}{3^{3x}+3^{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\left(\arctan x\right)^{\frac{1}{1-\arctan x}}$

7) $f(x)=\begin{cases}(x-1)^3+1, & -\infty<x<0\\ [\![\sin x]\!], & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ \dfrac{|x-2|\operatorname{sgn}(x-2)}{x^2-5x+6}, & \dfrac{\pi}{4}<x<2\\ -\dfrac{\ln 2}{\ln x}, & 2\le x<\infty\end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) f fonksiyonu terslenebilir midir? Açıklayınız. (5 puan)

b) f fonksiyonunun $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ ve $x=2$ noktalarındaki sürekliliğini inceleyiniz, süreksiz olduğu nokta varsa türünü belirleyiniz. (15 puan)

8) $f(x)=\sin x-x$ ile tanımlı f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösteriniz. (10 puan)

Not: Süre 100 dakikadır.

Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

ANALİZ I FİNAL CEVAP ANAHTARI

1-) $A=\{x\in\mathbb{R}: \log_4 x + 6\log_x 4 - 5 = 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}: \operatorname{ch}x=-1\}$

$$\log_4 x + 6\log_x 4 - 5 = 0 \overset{\log_4 x = u}{\Longrightarrow} u + 6\cdot\frac{1}{u} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (u-2)(u-3) = 0$$

$$\Rightarrow u=2 \text{ veya } u=3$$

$$\Rightarrow \log_4 x = 2 \text{ veya } \log_4 x = 3$$

$$\Rightarrow x=16 \text{ veya } x=64$$

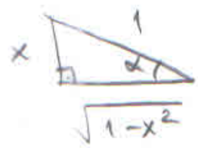
$\operatorname{ch}x=-1$ olacak şekilde $x\in\mathbb{R}$ yoktur.

$A=\{16,64\}$, $B=\varnothing$ $\Rightarrow$ $A\cup B=\{16,64\}$

$\Rightarrow$ $\sup A\cup B = 64$, $\inf A\cup B = 16$

2-) $x\in(-1,1)$ için $\sec(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğunu gösterelim.

$\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$



$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3-) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0$ olduğunu gösterelim.

$$0<\frac{5^n}{n!} = \frac{\overbrace{5.5\ldots5}^{n \text{ tane}}}{1.2\ldots n} = \frac{5^9}{9!}\cdot\frac{\overbrace{5.5\ldots5}^{n-9 \text{ tane}}}{10.11\ldots n}$$

$$= \frac{5^9}{9!}\cdot\underbrace{\frac{5}{10}}_{=\frac{1}{2}}\underbrace{\frac{5}{11}}_{<\frac{1}{2}}\cdots\underbrace{\frac{5}{n}}_{<\frac{1}{2}}$$

$$< \frac{5^9}{9!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-9}$$

$$= \frac{5^9}{9!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2^9 = \frac{10^9}{9!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

olduğundan sıkıştırma teoremi gereği $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0$ dır.

4-) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2.1! + 3.2! + \dots + (n+1).n!}{(n+2)!} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\left.\begin{array}{l} x_n = 2.1! + 3.2! + \dots + (n+1).n! \\ y_n = (n+2)! \end{array}\right\}$ alınırsa

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n+2)! = \infty$ ve (y_n) artan olduğundan

stolz teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2.1! + 3.2! + \dots + n.(n-1)! + (n+1).n!\right) - \left(2.1! + 3.2! + \dots + n.(n-1)!\right)}{(n+2)! - (n+1)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1).\ n!}{(n+1)!\ (n+2-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}.(n+1)} = 0$$

olduğundan stolz teoremi gereği $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$ olur.

5-) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 5}{3}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \le \dfrac{5}{2}$ olduğunu gösterelim. Tümevarım prensibini kullanalım.

$n = 1$ için $a_1 = 2 \le \dfrac{5}{2}$ sağlanır.

$n = k$ için $a_k \le \dfrac{5}{2}$ olsun.

$n = k+1$ için $a_{k+1} \le \dfrac{5}{2}$ mi?

$a_{k+1} = \dfrac{a_k + 5}{3} \le \dfrac{\frac{5}{2} + 5}{3} = \dfrac{5}{2}$ olup tümevarım prensibi gereği $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \le \dfrac{5}{2}$ dir.

b) (a_n) dizisinin artan olduğunu gösterelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + 5}{3} - a_n = \dfrac{5 - 2a_n}{3} \ge 0$

olduğundan $a_n \le a_{n+1}$ dir, yani (a_n) dizisi artandır.

c) (a_n) dizisi artan ve üstten sınırlı olduğundan Monoton Yakınsaklık teoremi gereği yakınsaktır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ diyelim. Bu durumda

$L = \dfrac{L+5}{3} \Rightarrow 3L = L + 5 \Rightarrow L = \dfrac{5}{2}$

elde edilir.

6) a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan\frac{x}{2}\ \sin x}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\cos 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan\frac{x}{2}\ \sin x}{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\cos 2x} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\tan\frac{x}{2}\ \sin x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\ \cos 2x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\tan\frac{x}{2}}{x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+9}+3}{\cos 2x}$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{6}{1} = 3$

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}+e^{2x}+e^{x}}{3^{3x}+3^{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{3^{3x}\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)}$

$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^{3x} \dfrac{1+\cancel{\frac{1}{e^{x}}}^{\to 0}+\cancel{\frac{1}{e^{2x}}}^{\to 0}}{1+\cancel{\frac{1}{3^{2x}}}^{\to 0}}$

$\overset{\frac{e}{3}<1}{=} 0$

c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} \left(\arctan x\right)^{\frac{1}{1-\arctan x}} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x\to 0}(\arctan x - 1)\cdot\frac{1}{1-\arctan x}}$

$= e^{\lim_{x\to 0} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

7)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3+1 & , \ -\infty < x < 0 \\ [|\sin x|] & , \ 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ \dfrac{|x-2|\ \mathrm{sgn}(x-2)}{x^2-5x+6} & , \ \frac{\pi}{4} < x < 2 \\ -\dfrac{\ln 2}{\ln x} & , \ 2 \le x < \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (x-1)^3+1 , & -\infty < x < 0 \\ 0 , & 0 < x \le \frac{\pi}{4} & \left(0 < \sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ve } [|\sin x|]=0\right) \\ \dfrac{1}{x-3} , & \frac{\pi}{4} < x < 2 & \left(x-2<0,\ |x-2| = 2-x,\ \mathrm{sgn}(x-2) = -1 \right. \\ -\dfrac{\ln 2}{\ln x} , & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

a) f fonksiyonu $(0, \frac{\pi}{4}]$ aralığında sabit olduğundan 1-1 olamaz, dolayısıyla terslenebilir değildir.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x-1)^3+1 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

f, $x=0$ da tanımlı değildir. Dolayısıyla $x=0$ kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} 0 = 0$ $\neq$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}-3}$

$f(\frac{\pi}{4}) = 0$

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{4}$ sıçramalı süreksizlik noktası

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-3} = -1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} -\frac{\ln 2}{\ln x} = -1$

$f(2) = -\frac{\ln 2}{\ln 2} = -1$

$\Rightarrow$ f fonksiyonu $x=2$ noktasında süreklidir.

8-) $f(x) = \sin x - x$, $\mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|x_1 - x_2| < \delta$ olduğunda $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ var mı?

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |(\sin x_1 - x_1) - (\sin x_2 - x_2)| \\
&= |(\sin x_1 - \sin x_2) - (x_1 - x_2)| \\
&\leq |\sin x_1 - \sin x_2| + |x_1 - x_2| \\
&= \left| 2 . \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| + |x_1 - x_2| \\
&= 2 \left| \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| + |x_1 - x_2| \\
&\leq 2 \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| 1 + |x_1 - x_2| \\
&= 2|x_1 - x_2| < 2\delta = \varepsilon \quad \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

O halde f düzgün süreklidir.